

*Ю. В. Кириенко, Т. Л. Ким*

## СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОСТИ: УПРОЩЕНИЕ ДИАГРАММНОЙ ТЕХНИКИ В ПРОСТРАНСТВАХ ВЫСОКИХ РАЗМЕРНОСТЕЙ\*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Методом ренормализационной группы изучается стохастическая модель турбулентности в пространствах высокой размерности  $d \rightarrow \infty$ . Подобная асимптотическая задача представляет интерес, так как имеются основания считать, что в таком пределе показатели аномального скейлинга обращаются в нуль и становится справедливой теория Колмогорова. Показана возможность существенного сокращения числа диаграмм Фейнмана при вычислении  $\beta$ -функции в рассматриваемом пределе. Библиогр. 11 назв.

*Ключевые слова:* статистическая теория турбулентности, диаграммы Фейнмана, ренормализационная группа.

*Yu. V. Kirienko, T. L. Kim*

## THE STOCHASTIC MODEL OF TURBULENCE: SIMPLIFICATION OF THE DIAGRAM TECHNIQUE IN HIGH DIMENSIONS

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

A stochastic model of turbulence is studied by the renormalization group approach in high dimensions  $d \rightarrow \infty$ . This asymptotic problem is of interest in connection with the fact that there are reasons to believe that in this limit the anomalous scaling vanish and Kolmogorov theory become fair. The paper shows the possibility of significant reduction in the number of Feynman diagrams in the calculation of  $\beta$ -function in this limit. It is shown that in addition to the previously known mechanism of simplification of calculations associated with the insignificance of diagrams that contain scalar products of different wave vectors as multipliers in the limit of  $d \rightarrow \infty$ , there is a more complex mechanism, caused by the mutual reduction of certain groups of diagrams after renormalization. With these simplifications, only 9 of 4080 diagrams are significant in the third-order perturbation theory. This opens up additional opportunities for the calculations in the high orders of the perturbation theory. Refs 11.

*Keywords:* statistical theory of turbulence, Feynman diagrams, renormalization group.

**Введение.** Обоснование аномального скейлинга остаётся одной из нерешённых проблем теории развитой турбулентности. Достигнутые успехи в этой области связаны с использованием упрощённой модели турбулентного перемешивания пассивной примеси Крейчнана. В работах [1, 2] показано, что в пространствах высокой размерности  $d \rightarrow \infty$  показатели аномального скейлинга обращаются в нуль и становится справедливой теория Колмогорова. Показатели аномального скейлинга были вычислены в порядке  $O(1/d)$ . Другим способом расчёта показателей в рамках модели Крейчнана является использование  $\epsilon$ -разложения. В работах [3, 4] эти показатели вычислены в порядке  $O(\epsilon)$ , а использование техники ренормгруппы позволило довести точность  $\epsilon$ -разложения до третьего порядка теории возмущений [5]. К сожалению, ни один из

\* Работа выполнена при поддержке исследовательского гранта СПбГУ 11.38.185.2014.

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2016

этих приёмов не удавалось до сих пор применять в стохастической теории турбулентности из-за больших технических трудностей вычислений, поэтому в работах [6–8] была сделана попытка провести ренормгрупповой анализ и  $\epsilon$ -разложение в пределе  $d \rightarrow \infty$  пространств высокой размерности. Расчёт диаграмм Фейнмана при этом существенно упрощается — большая часть диаграмм обращается в нуль в пределе  $d \rightarrow \infty$ . Это позволило рассчитать ренормгрупповые функции в трёхпетлевом приближении (третий порядок теории возмущений) [6]. В идеале при таком подходе хотелось бы просуммировать  $\epsilon$ -разложение и получить ответ в главном порядке при  $d \rightarrow \infty$ , как это сделано при  $N \rightarrow \infty$  в  $1/N$ -разложении в теории критических явлений ( $N$  — число компонент параметра порядка). По результатам трёхпетлевого расчёта в [6] предложен вариант суммирования  $\beta$ -функции по форме, совпадающий с точным результатом РГ-расчёта модели спектрального переноса энергии Гейзенберга [9]. Проверкой справедливости такого суммирования мог бы стать четырёхпетлевой расчёт, однако число диаграмм Фейнмана в этом случае остаётся весьма большим даже с учётом упрощений, учитываемых в [6].

В представляемой работе на основе анализа диаграмм Фейнмана в первых трёх порядках теории возмущений показано, что помимо упрощений, использованных при вычислении диаграмм в [6], существует дополнительный механизм, существенно уменьшающий число ненулевых диаграмм. Это даёт надежду продвинуться в расчётах по теории возмущений и, возможно, сформулировать замкнутую упрощённую точно решаемую модель, как это сделано в главном порядке  $1/N$ -разложения в теории критических явлений (так называемая сферическая модель).

**Стохастическая модель турбулентности.** Движение вязкой несжимаемой жидкости описывается уравнением Навье—Стокса

$$\partial_t v_i = -\partial_i P - (v_j \partial_j) v_i + \nu_0 \partial^2 v_i + f_i, \quad (1)$$

где  $v_i$  — поле скорости;  $P$  и  $\nu_0$  — давление и кинематический коэффициент вязкости соответственно;  $f_i$  — внешняя сила на единицу массы. Мы используем обозначение  $\partial_j$  для производной  $\partial/\partial x_j$  по координате и  $\partial^2$  — для оператора Лапласа. Уравнение (1) дополняется условием несжимаемости

$$\partial_i v_i = 0, \quad (\mathbf{k}, \mathbf{v}(\mathbf{k})) = 0, \quad (2)$$

означающим поперечность, т. е. ортогональность фурье-компоненты скорости  $\mathbf{v}$  своему волновому вектору  $\mathbf{k}$ . Сила  $f_i$  в (1) также является поперечной, в стохастической модели однородной изотропной турбулентности она считается случайной и моделирует подкачку энергии в систему, компенсируя вязкие потери и обеспечивая существование стационарного состояния. Обычно для неё принимают простейшее гауссово распределение с нулевым средним и коррелятором

$$\langle f_i(t_1, \mathbf{x}_1) f_j(t_2, \mathbf{x}_2) \rangle \equiv D_{ij}^f(t_1 - t_2, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2), \quad (3)$$

$$D_{ij}^f(t, \mathbf{k}) = \delta(t) P_{ij}(\mathbf{k}) d_f(k), \quad (4)$$

где  $P_{ij}(\mathbf{k}) \equiv \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$  — поперечный проектор. В инерционном интервале волновых чисел  $m \ll k \ll k_{\text{diss}}$  ( $m^{-1} = L$  — внешний масштаб турбулентности;  $k_{\text{diss}}^{-1}$  — диссипативная длина) можно использовать степенную модель

$$d_f(k) = D_0 k^{4-d-2\epsilon} \theta(k - m), \quad (5)$$

где  $\epsilon$  — аналог  $(4 - d)$ -параметра Вильсона в теории фазовых переходов. Физическое значение  $\epsilon = 2$ , что при  $m \rightarrow 0$  соответствует накачке энергии в систему вихрями бесконечно большого размера.

Согласно известной теореме [10], стохастическая задача (1)–(5) эквивалентна квантовой теории поля с удвоенным числом поперечных полей  $\Phi = \{v, v'\}$  и действием

$$S_0 = v' D^f v' / 2 + v' (-\partial_t v - (v\partial)v + v_0 \partial^2 v), \quad (6)$$

где подразумеваются все необходимые интегрирования по переменным  $(t, \mathbf{x})$  и суммирования по значкам. Вклад давления в (6) отсутствует из-за поперечности вспомогательного поля  $v'$ .

Определяемые действием (6) диаграммы теории возмущений содержат при  $\varepsilon \rightarrow +0$  ультрафиолетовые (УФ) расходимости (полюса по  $\varepsilon$ ). Они устраняются перенормировкой вязкости. Соответствующее ренормированное действие имеет вид

$$S = v' D^f v' / 2 + v' (-\partial_t v - (v\partial)v + \nu Z_\nu \partial^2 v) \quad (7)$$

и получается из (6) мультипликативной перенормировкой параметров

$$D_0 = g_0 \nu_0^3 = g \mu^{2\varepsilon} \nu^3, \quad \nu_0 = \nu Z_\nu, \quad g_0 = g \mu^{2\varepsilon} Z_g, \quad Z_g = Z_\nu^{-3},$$

где  $\mu$  — «ренормировочная масса»;  $g$  — безразмерный ренормированный заряд.

Пропагаторы фейнмановской диаграммной техники, соответствующие модели (7), (4), (5), имеют в  $(\mathbf{k}, t)$ -представлении вид

$$\langle v_i(t_1) v_j(t_2) \rangle = \frac{d_f(k)}{2\nu k^2} \exp[-\nu k^2 |t_1 - t_2|] P_{ij}(\vec{k}) = \text{---} \quad (8)$$

$$\langle v_i(t_1) v'_j(t_2) \rangle = \theta(t_1 - t_2) \exp[-\nu k^2 (t_1 - t_2)] P_{ij}(\vec{k}) = \text{---}+ \quad (9)$$

Взаимодействию в (7) отвечает тройная вершина  $-v'(v\partial)v = v'_j V_{jst} v_s v_t$  с вершинным множителем

$$V_{jst} = i k_s \delta_{jl} = \text{---} \text{---} \text{---} \quad (10)$$


Здесь  $k_s$  — импульсный аргумент поля  $v'$ . Перечёркнутая линия в (10) соответствует полю  $v'_j$ ; линия с жирной точкой — полю  $v_s$ , свёрнутому с  $i k_s$ ; линия без отметок соответствует полю  $v_l$ . Для наших целей удобнее использование вершины в несимметричной по полям  $v$  форме (10), хотя это сильно увеличивает число диаграмм (при симметричной записи соответствующим образом увеличивается число слагаемых в каждой из диаграмм). Дело в том, что при этом можно указать на классы диаграмм, обращающиеся в нуль при  $d \rightarrow \infty$ , в то время как при использовании симметризованной вершины пришлось бы говорить об обращении в нуль части вкладов в диаграмму.

Существование и устойчивость неподвижной точки ренормгруппы определяется  $\beta$ -функцией (см., например, [6]):

$$\beta(g) = -g(2\varepsilon - 3\gamma_\nu). \quad (11)$$

Входящую в (11) РГ-функцию  $\gamma_\nu$  определяют обычно через константу ренормировки вязкости  $Z_\nu$ . Хотя  $Z_\nu$  содержит полюсы по  $\varepsilon$ , общая теория ренормировок гарантирует отсутствие таких полюсов в  $\gamma_\nu$ . Мы будем использовать для  $\gamma_\nu$  другое представление, позволяющее с самого начала избежать появления полюсов, что удобно при численных расчётах [8, 11].

Введём  $\Gamma_{ij}(k, \omega) = \langle v_i v_j' \rangle_{1-ir}$  — один-неприводимую функцию  $vv'$ , рассчитанную в «базовой теории» — теории с действием (7), в котором положено  $Z_v = 1$ . Эта функция пропорциональна поперечному проектору

$$\Gamma_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = P_{ij}(\mathbf{k})\Gamma(k, \omega), \quad \Gamma(k, \omega) = \frac{\Gamma_{ii}(\mathbf{k}, \omega)}{d-1}.$$

Определим также нормированную функцию, равную единице в низшем порядке теории возмущений (беспетлевое приближение):

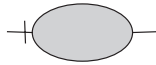
$$\bar{\Gamma}(k, \omega) = \frac{\Gamma(k, \omega)}{-vk^2}. \quad (12)$$

Наложим на ренормированную функцию (12) условие нормировки  $\bar{\Gamma}^R|_{k=0, \omega=0, m=\mu} = 1$  и будем считать это условием на  $Z_v$ , определяющим выбор схемы ренормировки. В такой схеме РГ-функцию  $\gamma_v$  можно записать в виде [8]

$$\gamma_v(g) = -R'(m\partial_m \bar{\Gamma})|_{k=0, \omega=0, m=\mu}, \quad (13)$$

где  $R'$  — неполная  $R$ -операция Боголюбова—Парасюка, вычитающая расходимости из подграфов диаграммы. Принятой схеме ренормировки отвечает операция вычитания из расходящихся подграфов их значений в точке нормировки  $m = \mu$  и на нулевых втекающих в подграф импульсе и частоте. Определяемая согласно (13) функция  $\gamma_v(g)$  является конечной при  $\epsilon = 0$ : операция  $m\partial_m$  снимает поверхностную расходимость диаграмм, а  $R'$ -операция — остающиеся расходимости в подграфах.

**Предел больших  $d$ .** Таким образом, задача сводится к расчёту 1-неприводимых двухвосток вида

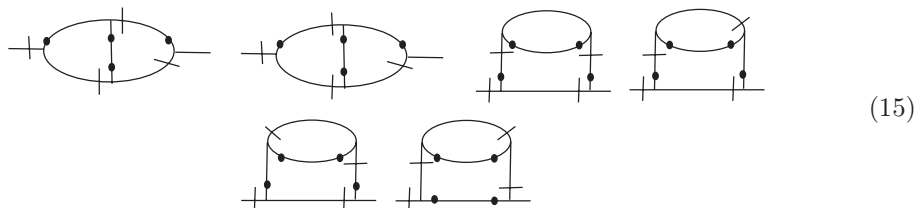


Необходимые диаграммы получаются построением 1-неприводимых двухвосток скалярной модели  $\phi^3$  и последующим проставлением чёрточки и точки в каждой из вершин, при этом на одной из внешних вершин должна быть чёрточка. Условие запаздывания в пропагаторе (9) приводит к тому, что могут быть опущены равные нулю диаграммы с замкнутыми циклами линий  $vv'$ . Таким образом, в однопетлевом приближении имеем 4 диаграммы

$$+ \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \quad (14)$$

Упрощения диаграмм, использованные в пределе  $d \rightarrow \infty$  в работах [6], основывались на двух обстоятельствах. В линиях  $vv$  из (5), (8) содержится зависимость от  $d$  вида  $k^{-d}$ . В диаграммах рассматриваемой 1-неприводимой функции число таких линий равно числу петель. Выбирая в импульсном представлении протечку импульсов таким образом, чтобы по линиям  $vv$  протекали простые импульсы интегрирования, и используя сферическую систему координат, убеждаемся, что зависимость  $k^{-d}$  в линиях сокращается множителями  $k^{d-1}$  в элементах объема. В свою очередь, зависящие от углов множители в элементах объема пропорциональны  $\sin(\theta)^d$  и имеют при  $d \rightarrow \infty$  и  $\theta = \pi/2$  резкий максимум, это означает, что в главном приближении скалярными произведениями любых двух различных векторов можно пренебречь. Из четырёх однопетлевых диаграмм (14) лишь первая не содержит скалярных произведений в виде

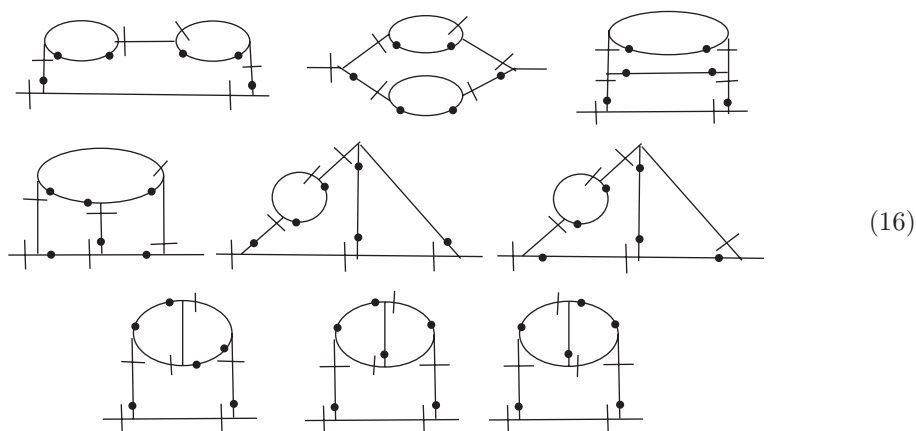
множителей, поэтому только она даёт вклад в главном приближении при  $d \rightarrow \infty$ . Аналогичное рассмотрение показывает, что в двухпетлевом приближении из общего числа 120 главный вклад дают следующие 6 диаграмм:



В трёхпетлевом приближении число существенных диаграмм возрастает до 83 (из общего числа 4080).

Вычисления двух- и трёхпетлевых диаграмм показывают, что и после отбрасывания нулевых диаграмм по указанному выше признаку, некоторые из оставшихся также не дают вклада в РГ-функцию (13). Это — две двухпетлевые диаграммы (нижняя строчка (15)), а также две трёхпетлевые диаграммы. В отличие от отброшенных ранее диаграмм они обращаются в нуль только после действия операции  $R'$  вычитания расходимостей в подграфах в (13).

Анализ трёхпетлевых диаграмм показывает, что эти нули не являются «случайными». Нами были найдены группы из двух, трёх и более диаграмм, которые в сумме также не дают вклада в (13). В результате оказалось, что трёхпетлевой вклад в (13) полностью определяется 9 диаграммами:



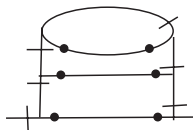
Сценарий полного сокращения диаграмм контрчленами состоит в следующем. После интегрирования по времени и симметризации подынтегрального выражения по импульсам интегрирования диаграмма (или сумма соответствующих диаграмм) распадается на множители, не содержащие общих переменных интегрирования. Каждый из множителей содержит полюс по  $\epsilon$ , который устраняется  $R'$ -операцией в (13). Её действие на выражение, не зависящее от внешних импульсов, сводится к обращению этого множителя в нуль. Предварительное дифференцирование  $m d_m$  в (13) может снять расходимость в одном из множителей, но не в двух сразу. Таким образом, действие  $R'$ -операции на факторизующуюся диаграмму сводится к обращению её в нуль.

Простейший пример такого механизма представляют собой диаграммы из нижней строчки (15), обращающиеся в нуль «индивидуально». Обе указанные диаграммы после

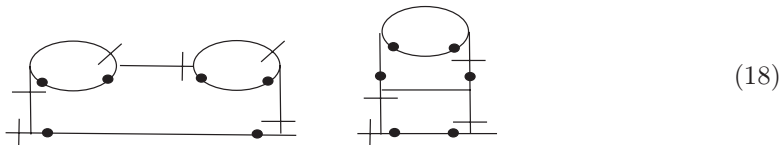
интегрирования по времени сводятся к двукратному интегралу по модулям импульсов (несущественные множители опускаем):

$$\int_m^\infty dk k^{1-2\varepsilon} \int_m^\infty dq q^{1-2\varepsilon} \frac{1}{k^2(k^2+q^2)} = \frac{1}{2} \int_m^\infty dk k^{1-2\varepsilon} \int_m^\infty dq q^{1-2\varepsilon} \frac{1}{k^2 q^2}. \quad (17)$$

Проведённая в (17) симметризация привела к факторизации диаграммы, после чего действие операции  $R'm\partial_m$  обращает её в нуль. Пример трёхпетлевой диаграммы, обладающей таким же свойством:



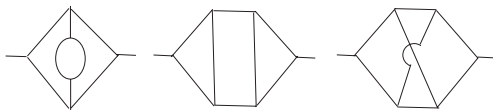
Более сложный пример — не дающая вклад в (13) сумма двух трёхпетлевых диаграмм:



**Заключение.** Полученные результаты демонстрируют возможность существенного сокращения количества диаграмм Фейнмана при ренормгрупповом расчёте стохастической модели турбулентности в пространствах высокой размерности. Чтобы в полной мере воспользоваться этой возможностью, необходимо сформулировать принцип отбора диаграмм, приводящий к результатам, частным случаем которых являются трёхпетлевые диаграммы (16). Мы надеемся осуществить такую программу в будущем, а пока сформулируем некоторые наблюдения, следующие из полученных трёхпетлевых результатов:

1. Расходящиеся подграфы в существенных диаграммах представлены лишь в виде единственной вставки однопетлевого подграфа определенного типа (первая диаграмма (14)), двухпетлевые расходящиеся подграфы отсутствуют.

2. В существенных трёхпетлевых диаграммах представлены не все топологически возможные варианты, отсутствуют диаграммы вида



3. Нетривиальным фактом является сокращение топологически различных диаграмм, например (18).

## Литература

1. Chertkov M., Falkovich G., Kolokolov I., Lebedev V. Normal and anomalous scaling of the fourth-order correlation function of a randomly advected passive scalar // Phys. Rev. (E). 1995. Vol. 52. P. 4924.
2. Chertkov M., Falkovich G. Anomalous scaling exponents of a white-advection passive scalar // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76. P. 2706.
3. Gawedzki K., Kupiainen A. Anomalous scaling of the passive scalar // Phys. Rev. Lett. 1995. Vol. 75. P. 3834.

4. Bernard D., Gawedzki K., Kupiainen A. Anomalous scaling in the N-point functions of a passive scalar // *Phys. Rev. (E)*. 1996. Vol. 54. P. 2564.
5. Adzhemyan L. Ts., Antonov N. V., Barinov V. A., Kabrits Yu. S., Vasil'ev A. N. Calculation of the anomalous exponents in the rapid-change model of passive scalar advection to order  $\varepsilon^3$  // *Phys. Rev. (E)*. 2001. Vol. 64. 056306.
6. Adzhemyan L. Ts., Antonov N. V., Gol'din P. B., Kim T. L., Kompaniets M. V. Renormalization group in the theory of turbulence: Three-loop approximation as  $d \rightarrow \infty$  // *Theor. Math. Phys.* 2009. Vol. 158, iss. 3. P. 391–405.
7. Adzhemyan L. Ts., Antonov N. V., Gol'din P. B., Kim T. L., Kompaniets M. V. Renormalization group in the infinite-dimensional turbulence: Third-order results // *J. Phys. (A)*. 2008. Vol. 41. 495002.
8. Adzhemyan L. Ts., Kim T. L., Kompaniets M. V., Sazonov V. K. Renormalization group in the infinite-dimensional turbulence: determination of the RG-functions without renormalization constants // *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics*. 2015. Vol. 6, N 4. P. 461–469.
9. Adzhemyan L. Ts., Antonov N. V. Renormalization group in turbulence theory: Exactly solvable Heisenberg model // *Theor. Math. Phys.* 1998. Vol. 115. P. 562–574.
10. Martin P. C., Siggia E. D., Rose H. A. Statistical dynamics of classical systems // *Phys. Rev. (A)*. 1973. Vol. A. P. 423.
11. Adzhemyan L. Ts., Kompaniets M. V., Novikov S. V., Sazonov V. K. Representation of the  $\beta$ -function and anomalous dimensions by nonsingular integrals: Proof of the main relation // *Theor. Math. Phys.* 2013. Vol. 175. P. 717–726.

## References

1. Chertkov M., Falkovich G., Kolokolov I., Lebedev V. Normal and anomalous scaling of the fourth-order correlation function of a randomly advected passive scalar. *Phys. Rev. (E)*, 1995, vol. 52, pp. 4924.
2. Chertkov M., Falkovich G. Anomalous scaling exponents of a white-advected passive scalar. *Phys. Rev. Lett.*, 1996, vol. 76, pp. 2706.
3. Gawedzki K., Kupiainen A. Anomalous scaling of the passive scalar. *Phys. Rev. Lett.*, 1995, vol. 75, pp. 3834.
4. Bernard D., Gawedzki K., Kupiainen A. Anomalous scaling in the N-point functions of a passive scalar. *Phys. Rev. (E)*, 1996, vol. 54, pp. 2564.
5. Adzhemyan L. Ts., Antonov N. V., Barinov V. A., Kabrits Yu. S., Vasil'ev A. N. Calculation of the anomalous exponents in the rapid-change model of passive scalar advection to order  $\varepsilon^3$ . *Phys. Rev. (E)*, 2001, vol. 64, 056306.
6. Adzhemyan L. Ts., Antonov N. V., Gol'din P. B., Kim T. L., Kompaniets M. V. Renormalization group in the theory of turbulence: Three-loop approximation as  $d \rightarrow \infty$ . *Theor. Math. Phys.*, 2009, vol. 158, iss. 3, pp. 391–405.
7. Adzhemyan L. Ts., Antonov N. V., Gol'din P. B., Kim T. L., Kompaniets M. V. Renormalization group in the infinite-dimensional turbulence: Third-order results. *J. Phys. (A)*, 2008, vol. 41, 495002.
8. Adzhemyan L. Ts., Kim T. L., Kompaniets M. V., Sazonov V. K. Renormalization group in the infinite-dimensional turbulence: determination of the RG-functions without renormalization constants. *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics*, 2015, vol. 6, no 4, pp. 461–469.
9. Adzhemyan L. Ts., Antonov N. V. Renormalization group in turbulence theory: Exactly solvable Heisenberg model. *Theor. Math. Phys.*, 1998, vol. 115, pp. 562–574.
10. Martin P. C., Siggia E. D., Rose H. A. Statistical dynamics of classical systems. *Phys. Rev. (A)*, 1973, vol. A, pp. 423.
11. Adzhemyan L. Ts., Kompaniets M. V., Novikov S. V., Sazonov V. K. Representation of the  $\beta$ -function and anomalous dimensions by nonsingular integrals: Proof of the main relation. *Theor. Math. Phys.*, 2013, vol. 175, pp. 717–726.

Статья поступила в редакцию 26 апреля 2016 г.

## Контактная информация

Кириенко Юрий Владимирович — кандидат физико-математических наук;  
e-mail: y.kirienko@spbu.ru

Ким Татьяна Лорановна — кандидат физико-математических наук, доцент;  
e-mail: tlkim@yandex.ru

Kirienko Yury Vladimirovich — PhD; e-mail: y.kirienko@spbu.ru

Kim Tatyana Loranovna — PhD, Associate Professor; e-mail: tlkim@yandex.ru